Richard Huber
richard.huber@uni-graz.at

Grundinformationen:
Man betrachte einen Banachraum X und eine Funktion $F\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ wobei $\mathrm{Dom(F)} := \{x \in X \mid F(x) \in \mathbb{R}\}$. Man nennt F konvex, falls für $\alpha \in [0,1]$ und alle $x, y \in X$ gilt

$$F(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha F(x) + (1-\alpha)F(x). \tag{1}$$

Man nennt F unterhalbstetig falls für eine Folge $(x_n)_n$ in X gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad \Rightarrow \qquad F(x) \leq \liminf F(x_n). \tag{2}$$

Analoge Definitionen von schwach oder schwach* Unterhalbstetigkeit gelten, indem man die Konvergenz von $x_n \to x$ auf die entsprechende Topologie anpasst. Für $F, G, F_i\colon X \to [0,\infty]$ unterhalbstetig (in beliebiger Topologie) mit $i \in \mathcal{I}$ beliebige Indexmenge und $\alpha > 0$, sind die folgenden Funktionen ebenfalls unterhalbstetig (in entsprechender Topologie)

$$H_1(u) = \alpha F(u), \qquad H_2(u) = F(u) + G(u), \qquad H_3(u) = \sup_{i\in\mathcal{I}} F_i(u), \qquad \forall u \in X. \tag{3}$$

Es gilt außerdem für konvexe Funktionen, dass unterhalbstetig und schwach unterhalbstetig äquivalent sind. Weiters nennt man eine Funktion koerziv, falls für jedes $R \in \mathbb{R}$ ein $r \in \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$\|x\| > r \qquad \Rightarrow \qquad F(x) > R. \tag{4}$$

Außerdem gilt im Dualraum Y^* eines seperablen Banachraums Y, dass beschränkte Mengen schwach* folgen kompakt sind, das heißt insbesondere für eine Folge (ξ_n) in Y^* mit $\|\xi_n\| < R$ für ein $R \in \mathbb{R}$ gilt, dass ξ_n eine schwach* konvergente Teilfolge besitzt. Man bemerke außerdem, dass für $\Omega \subset \mathbb{R}$ mit nichtleerem Inneren gilt, dass $L^p(\Omega)$ für $p \in]1,\infty]$ ein Dualraum, für $p \in]1,\infty[$ reflexiv, und für $p \in [1,\infty[$ separabel ist.

Aufgabe 6.1) [Integralfunktionen]
Sei $p \in [1,\infty)$, $\Omega = [0,1]$, $g\colon \Omega \times \mathbb{R} \to [0,\infty]$ messbar, sodass für festes $x \in \Omega$ ist $y \mapsto g(x,y)$ konvex und unterhalbstetig (in der Standard Topologie in $\mathbb{R}$) sowie

$$F\colon L^p(\Omega) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\} \qquad \text{mit} \qquad F(u) = \int_\Omega g(x, u(x))\,\mathrm{d}x \quad \text{für } u \in L^p(\Omega). \tag{5}$$

Dies ist Wohldefiniert, da $u \in L^p$ fast überall nicht Unendlich ist und der Integrand eine nicht-negative messbare Funktion ist (unterhalbstetige Funktionen sind Borel-messbar). Zeigen Sie, dass F schwach unterhalbstetig ist.

Bemerkung. *Wie das Beispiel zeigt, lassen sich für Funktionen die als Integrale mit punktweiser Auswertung der Variable geschrieben werden, wesentlich analytische Eigenschaften aus der internen Funktion g ableiten.*

Aufgabe 6.2) [Existenz in L^∞]
Es sei $M \subset L^1([0,1])$ und es existiere eine Konstante $c > 0$, sodass $\|v\|_{L^1} \leq c < 1$ für jedes

$v \in M$. Weiters sei $z \in L^\infty([0,1])$ gegeben und

$$F\colon L^\infty([0,1]) \to \mathbb{R} \qquad \text{mit} \qquad F(u) = \sup_{v\in M} \int_0^1 u(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \|u-z\|_\infty. \tag{6}$$

Wir wollen zeigen, dass diese Funktion einen Minimierer besitzt. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

a) Zeigen Sie, dass F schwach* (schwach-stern) unterhalbstetig in L^∞ ist, das heißt $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ impliziert $F(u) \leq \liminf_{n\to\infty} F(u_n)$.

Zeigen Sie weiters, dass F koerziv bezüglich der L^∞ Norm ist.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion F einen Minimierer besitzt, indem Sie analog zur Direkten Methode für reflexive Banachräume vorgehen.

Bemerkung. *Wie das Beispiel zeigt, ist die Direkte Methode für allgemeinere Situationen als reflexive Banachräume möglich – beispielsweise Dualräume seperabler Banachräume– allerdings muss man dazu auf andere Topologien (in diesem Fall schwach stern) wechseln, welche in der Regel schwieriger zu handhaben sind.*

Aufgabe 6.3) [Koerzivität unter linearen Operatoren]
Sei $A\colon X \to Y$ ein linearer stetiger Operator zwischen Banachräumen X und Y, und $g\colon Y \to \mathbb{R}$ sodass g beschränkte Mengen in Y auf nach oben beschränkte Mengen in $\mathbb{R}$ abbildet. Weiters sei $f(u) = g(Au - v_0)$ für ein $v_0 \in Y$. Zeigen Sie, f ist koerziv, genau dann, wenn A injektiv, $\operatorname{Rg}(A)$ abgeschlossen und insbesondere $A^{-1}\colon \operatorname{Rg}(A) \to X$ stetig.

Hinweis. *Um die Abgeschlossenheit der Range zu zeigen, überzeugen Sie sich davon, dass die Urbilder von Cauchy Folgen ebenfalls Cauchy Folgen sind. Nutzen Sie den Satz der offen Abbildung, um die stetige Invertierbarkeit von A aus der Injektivität und Abgeschlossenheit der Range zu folgern.*

Bemerkung. *Wie das Beispiel zeigt, bleibt Koerzivität unter affine linearer Transformation erhalten, falls die Transformation stetig invertierbar ist.*

Programmier-Aufgabe 6.4) [Diskretes L^2-H^1 Entrauschen]
Es seien $N, M \in \mathbb{N}$. Wir betrachten den diskreten Koordinatenraum $\Omega = \{1,\dots,N\}$ und den Raum der (diskreten Bilder) Funktionen $l^2(\Omega) \triangleq \mathbb{R}^N$ mit der Darstellung $U = (U_i)_{i=1}^N$ für $U \in l^2(\Omega)$. Es sei $\Omega' = \{1,\dots,M\}$ und $A\colon l^2(\Omega) \to l^2(\Omega')$ linear. Man betrachte für eine Konstante $\alpha > 0$, $\widetilde{V} \in l^2(\Omega')$ und $\widetilde{U} \in l^2(\Omega)$ das klassische Tikhonov-Problem

$$\hat{U} \in \operatorname*{argmin}_{U\in l^2(\Omega)} J(U) := \|AU - \widetilde{V}\|^2_{l^2(\Omega')} + \alpha\|U - \widetilde{U}\|^2_{l^2(\Omega)}. \tag{7}$$

Hierbei bezeichnen die Normen die Standard l^2 Normen, also $\|U\|^2_{l^2(\Omega)} = \sum_{i=0}^N U_i^2$ und $\|V\|^2_{l^2(\Omega')} = \sum_{i=0}^M V_i^2$ für $U \in l^2(\Omega)$, $V \in l^2(\Omega')$.

a) Zeigen Sie: Die Lösung des Problems (7) genügt der Gleichung

$$A^*AU + \alpha U = A^*\widetilde{V} + \alpha\widetilde{U}. \tag{8}$$

b) Wir betrachten den Fall $A = \nabla_n \colon l^2(\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,n\}) \to l^2(\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,n\}\times\{1,2\})$ – der diskrete Nabla-Operator – sodass für $U \in l^2(\Omega)$ gilt

$$[\nabla_h U]_{i,j,1} = \begin{cases} U_{i+1,j} - U_{i,j} & \text{falls } i \in \{1,\dots,N-1\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$[\nabla_h U]_{i,j,2} = \begin{cases} U_{i,j+1} - U_{i,j} & \text{falls } j \in \{1,\dots,M-1\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wenn man U als Vektor $[U_{11}, U_{12}, \dots, U_{1n}, U_{21}, \dots, U_{nn}]$ und analog für $\widetilde{U}$ und $\widetilde{V}$ schreibt, so kann man den Operator A in der Form von Aufgabe a) und insbesondere Gleichung (8) als lineares Gleichungssystem schreiben.

Schreiben Sie eine Matlab-Funktion "$[\hat{U}]$ =L2_H1_denoising($\alpha, \widetilde{V}, \widetilde{U}$)", welche (7) für den Nabla Operator, Daten $\widetilde{U}$ und $\widetilde{V}$ sowie $\alpha > 0$ löst. Testen Sie Ihre Implementierung anhand von $\widetilde{U}$ entsprechend des Bildes Link, $\widetilde{V} = 0$ und den Parametern $\alpha \in \{1, 0.5, 0.1, 0.05\}$.

Hinweis. *Zur Speicherung der Nabla-Operatoren sollten Sie unbedingt sparse Matrizen verwenden, siehe spdiags.*

Bemerkung. *Der Ansatz mit dem Nabla-Operator entspricht einer diskreten Variante des L^2-H^1 Entrauschens. Dabei versucht man U möglichst gut an $\widetilde{U}$ anzupassen, bestraft aber zu starke Unstetigkeiten (via ∇_h) um Rauschen zu entfernen. Der Parameter α legt dabei fest, wie stark der Einfluss dieser Strafe ist; in der Praxis ist das Bestimmen eines passenden Parameters nicht trivial. Wie die untenstehende Grafik zeigt, für α zu groß wird das Rauschen nicht entfernt, für α zu klein verschmiert das Bild. Der präsentierte Ansatz ist einer der simpelsten variationellen Ansätze zum Entrauschen, da durch die quadratische Natur das Problem algebraisch "einfach – da linear" gelöst werden kann.*

Abbildung 1: Resultat des $L^2 - H^1$ Entrauschens. Links das Ursprüngliche Bild, danach Rekonstruktionen für $\alpha = 1, 0.5, 0.1, 0.05$