Richard Huber
richard.huber@uni-graz.at

Grundinformationen:
Für $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen gilt, dass $\mathcal{C}_c(\Omega)$ – stetig mit kompaktem Träger – dicht in $L^p(\Omega)$ für $p \in [1, \infty[$.
Eine Funktion $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ mit $\varphi \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi \, \mathrm{d}x = 1$ wird als "Mollifier" bezeichnet, und $\varphi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^N}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$ erfüllt die folgenden Approximationseigenschaften: Für eine beschränkte und gleichmäßig stetige Funktion $f \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ gilt $f_\varepsilon := f * \varphi_\varepsilon$ konvergiert gegen f punktweise und gleichmäßig auf kompakten Mengen. Weiters gilt, dass die Faltung einer $L^p(\mathbb{R}^N)$ Funktion mit einer $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ Funktion ebenfalls unendlich oft differenzierbar ist.
Für ein Polynom $P \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $P(x) = \sum_{k=0}^K a_k x^k$ bezeichne $P(D)$ den linearen Differentialoperator $P(D)u = \sum_{k=0}^K a^k u^{(k)}$. Für $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt

$$\mathcal{F}[P(D)u](\xi) = P(i\xi)[\mathcal{F}u](\xi) \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

welches sich durch iterativen Anwenden der Rechenregeln für erste Ableitungen ergibt. Weiters gilt der Faltungssatz in verallgemeinerter Form: für $u, v \in L^2(\mathbb{R})$ gilt

$$\mathcal{F}(u * v) = \sqrt{2\pi}[\mathcal{F}u][\mathcal{F}u], \tag{2}$$

wobei hier $\mathcal{F}$ die Transformation im Sinne der temperierten Distributionen bezeichnet (da $u * v \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ aber nicht zwangsläufig in $L^1(\mathbb{R})$ oder $L^2(\mathbb{R})$).

Aufgabe 6.1) [Approximation via Faltung]
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein Gebiet und Faltung einer Funktion auf Ω, entspricht Nullfortsetzung außerhalb, Faltung, und anschließend wieder Einschränkung auf Ω.

a) Zeigen Sie für $f \in L^p(\Omega)$ mit $p \in [1, \infty[$, dass $\lim_{\varepsilon \to 0} \|f_\varepsilon - f\|_{L^p} = 0$.

b) Zeigen Sie für $f \in L^1(\Omega)$, dass

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} = \sup\left\{ \int_\Omega f v \, \mathrm{d}x \;\middle|\; v \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \ \|v\|_\infty \leq 1 \right\}. \tag{3}$$

c) Folgern Sie für $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ gilt

$$f = 0 \qquad \text{genau dann, wenn} \qquad \int_\Omega f(x)v(x) \, \mathrm{d}x = 0 \qquad \text{für alle } v \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega). \tag{4}$$

Hinweis. *Überlegen Sie zunächst für b) wie ein* $v \in L^\infty(\Omega)$ *aussehen müsste damit* $\|v\|_{L^1} = \int_\Omega f v \, \mathrm{d}x$ *(solches muss wegen dem Satz von Hahn-Banach existieren), schränken Sie diese auf ein etwas kleineres und beschränktes Gebiet ein (auf eine Weise die den Fehler kontrollierbar lässt) und nutzen Sie Faltung um geglättete Versionen dieses* v *zu erhalten, welche im Supremum* (3) *liefern.*

Bemerkung. *Punkt a) impliziert, dass* $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ *dicht in* $L^p(\Omega)$ *liegt. Auf ähnlichen (wenn auch weit technischeren) Überlegungen beruhen auch die Dichtheit von* $\mathcal{C}_c^\infty$ *in Sobolevräumen (wobei auf Mengen mit Rand Regularität des Rands eine Rolle spielt). Die Aussage aus* (4) *wird als Fundamentallemma der Variationsrechnung bezeichnet, und ist überaus wichtig, da es* *aussagt dass eine L^1_{loc} Funktion bereits durch "Testen" (damit ist die Operation $\int_\Omega f(x)v(x)\,\mathrm{d}x$ gemeint) mit sehr glatten Funktionen eindeutig (fast überall) definiert ist. Solche Überlegungen spiegeln sich beispielsweise auch in der Definition von Distributionen wider.*

Aufgabe 6.2) [Differentialgleichungen via Fouriertransformation]
Im Folgenden wollen wir betrachten, wie die Fouriertransformation als Werkzeug zur Bearbeitung von Differentialgleichungen genutzt werden kann.

a) Es sei P ein Polynom von Ordnung $K \geq 1$ mit $P(i\xi) \neq 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$ und wir betrachten für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ die lineare Differentialgleichung (mit konstanten Koeffizienten)

$$P(D)u = f \qquad \text{auf } \mathbb{R}. \tag{5}$$

Zeigen Sie, dass es genau eine Lösung u gibt welches $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ erfüllt, und dieses $u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f * \mathcal{F}^{-1}(\gamma)$ mit $\gamma(\xi) = \frac{1}{P(i\xi)}$ genügt.

b) Zeigen Sie $\mathcal{F}^{-1}\left[\xi \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2a}{a+\xi^2}\right](x) = e^{-a|x|}$ für $a > 0$. Weiters betrachten wir

$$-u'' + u = \chi_{[-1,1]}. \tag{6}$$

Bestimmen Sie unter der Annahme $u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f * \mathcal{F}^{-1}(\gamma)$ (obwohl die Annahmen von a) verletzt sind) $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ das (6) erfüllt, wobei χ die charakteristische Funktion bezeichnet.

c) Wir betrachten die partielle Differentialgleichung die auch als Wärmeleitungsgleichung bezeichnet wird:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) & \text{für } (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R} \\ u(0,x) = g(x) & \text{für } x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{7}$$

für eine Funktion $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, Konstante $k > 0$ und eine Funktion u abhängig von t (Zeit) und x (Ort). Weiters nehmen wir an (ohne dies im Moment zu rechtfertigen) dass für jedes $t \in (0,\infty)$ gilt $[x \mapsto u(t,x)] \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Leiten Sie mittels der Fouriertransformation die Formel $u(t,x) = [g * K_t](x)$ her, wobei $K_t = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \exp(-\frac{x^2}{4kt})$ den "Heat-Kernel" bezeichnet.

Hinweis. *Sie dürfen annehmen, dass $\mathcal{F}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{F}u}{\partial t}$ für $\mathcal{F}$ die Fouriertransformation bezüglich der x Variable. Außerdem sei daran erinnert, dass $\mathcal{F}[x \mapsto e^{-\frac{ax^2}{2}}] = [\xi \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\frac{\xi^2}{2a}}]$ für $a > 0$.*

Bemerkung. *Wie das Beispiel zeigt, erlaubt die Fouriertransformation das Lösen von Differential auf ganz $\mathbb{R}$. Man bemerke, dass die Einschränkung auf Schwartz Funktionen eine sehr Starke ist, analoge Resultate aber noch in wesentlich abstrakteren Sinne möglich sind.*

Aufgabe 6.3) [Radontransformation]
Es bezeichne $\Omega = \overline{B(0,1)} \subset \mathbb{R}^2$ und $\Omega' = [-1,1] \times [0,\pi[$. Wir definieren

$$\mathcal{R}\colon \mathcal{C}(\Omega) \to \mathcal{C}(\Omega') \qquad \text{mit} \qquad [\mathcal{R}f](s,\varphi) = \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} f(t\vartheta^\perp(\varphi) + s\vartheta(\varphi))\,\mathrm{d}t, \tag{8}$$

wobei $\vartheta(\varphi) = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))^T$, $\vartheta^\perp(\varphi) = (-\sin(\varphi), \cos(\varphi))^T$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{R}$ wohldefiniert, linear und stetig ist.

b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{R}$ der Abschätzung $\|\mathcal{R}f\|_{L^2(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^2(\Omega)}$ für ein $c > 0$ und jedes $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ genügt, und folgern Sie, dass sich der Operator $\mathcal{R}$ zu $\overline{\mathcal{R}}\colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega')$ stetig fortsetzen lässt.

Hinweis. *Es gilt* $\det[\vartheta(\varphi), \vartheta^{\perp}(\varphi)] = 1$ *für alle* $\varphi \in [0, \pi[$.

Bemerkung. *Der Operator* $\mathcal{R}$ *bzw.* $\overline{\mathcal{R}}$ *werden als Radontransformation (nach österreichischem Mathematiker Johann Radon) bezeichnet, und ist ein zentrales Werkzeug im Kontext von Computed Tomography (CT) in der medizinischen Bildgebung. In einem der Abschlussprojekte werden die Herleitung und Eigenschaften dieser Operation näher beleuchtet.*