Richard Huber
richard.huber@uni-graz.at

Grundinformationen:

Alle auf dem Blatt vorkommende Funktionen sind komplex-wertig. Die Menge der Schwartz-Funktionen ist definiert via

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \{\sigma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0 \ : |\sigma|_{\alpha,\beta} < \infty\} \text{ mit } |\sigma|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^\alpha D^\beta \sigma(x)|. \tag{1}$$

Man kann zeigen, dass

$$\mathcal{F}\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}), \qquad \text{mit} \qquad [\mathcal{F}\sigma](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \sigma(x) e^{-ix\xi} \, \mathrm{d}x \quad \text{für } \xi \in \mathbb{R} \tag{2}$$

ein linearer isomorphismus bezüglich der $L^2(\mathbb{R})$ Norm ist.
Da $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dicht in $L^2(\mathbb{R})$ liegt, lässt sich $\mathcal{F}\colon L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ als Erweiterung der Transformation (2) definieren und entspricht einem linearen isomorphismus, besitzt aber nicht zwangsläufig eine Integraldarstellung.
Weiters bezeichne $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ die Menge der temperierten Distributionen, der Raum der linearen stetigen Funktionen auf $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), \{|\cdot|_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta})$. Man bemerke, dass $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), \{|\cdot|_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta})$ kein normierter Raum ist, sondern "lokal-konvex", und Konvergenz $\sigma_n \to \sigma$ bedeutet, dass $|\sigma_n - \sigma|_{\alpha,\beta} \to 0$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$.
Auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ lässt sich linear bijektiv (und homeomorph, wobei wir nicht davon gesprochen haben was die passende Topologie ist)

$$\mathcal{F}\colon S'(\mathbb{R}) \to S'(\mathbb{R}), \qquad \text{mit} \qquad [\mathcal{F}u](\sigma) = [u](\mathcal{F}\sigma) \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),\ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \tag{3}$$

definieren. Man bemerke, dass all diese verschieden Definitionen übereinstimmen wo es Sinn ergibt.
Für $f \in L^1(\mathbb{R})$ mit $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$ gilt $\tilde{f} = f$ fast überall für ein $\tilde{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ und

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathcal{F}f](\xi) e^{i\xi x} \, \mathrm{d}\xi \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Zur Erinnerung, die Menge $\{x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2l}} e^{i\frac{2\pi}{l}kx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ bildet ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2([-l,l])$ und daher gilt für jede Funktion $f \in L^2([-l,l])$:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{\pi}{l}kx} \qquad \text{f. f. a. } x \in [-l,l], \qquad \text{mit } c_k = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t) e^{-i\frac{\pi}{l}kt} \, \mathrm{d}t, \tag{5}$$

die Fourierreihe mit Fourierkoeffizienten c_k. Für f sodass die periodische Fortsetzung stetig differenzierbar ist, gilt die Gleichheit auch punktweise mit gleichmäßiger Konvergenz der Reihe.

Aufgabe 5.1) [Zusammenhang Fourierreihe und Transformation]
Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar mit kompakten Träger in $[-l_0, l_0]$ (mit $l_0 > 0$) und es gelte $\int_{-\infty}^{\infty} [\mathcal{F}f](\xi) e^{i\xi x} \, \mathrm{d}\xi = \lim_{\delta_\xi \to 0} \delta_\xi \sum_{k\in\mathbb{Z}} [\mathcal{F}f](k\delta_\xi) e^{ik\delta_\xi x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, d.h. der Grenzwert passender zugehörigen Riemannsummen.

Betrachten Sie die Fourierreihe der Funktion $f\colon [-l,l] \to \mathbb{C}$ für $l > l_0$ (entsprechend eingeschränkt), finden Sie einen Zusammenhang zwischen c_k und $\mathcal{F}f$ und folgern Sie $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathcal{F}f](\xi) e^{i\xi x} \, \mathrm{d}x$ indem Sie $l \to \infty$ betrachten.

Bemerkung. *Wie das Beispiel zeigt, stehen die Fourierkoeffizienten im Zusammenhang mit der Fouriertransformation, und die Inversionsformel ergibt sich als Grenzwert der Fourierreihendarstellung für größer werdende Perioden.*

Aufgabe 5.2) [Reguläre temperierte Distributionen]
Es sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, die Menge der Äquivalenzklassen messbarer Funktionen die fast überall gleich sind und deren Einschränkung auf eine beliebige kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}$ in $L^1(K)$ liegt. Man kann mittels

$$T_f \colon \mathcal{C}_C^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \qquad \text{mit} \qquad T_f(u) = \int_{\mathbb{R}} u(x) f(x) \, \mathrm{d}x \tag{6}$$

eine Distribution definieren (man spricht von regulären Distributionen, welche verhältnismäßig schöne Eigenschaften besitzen).

a) Zeigen Sie, falls ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $g(x) := f(x)/(1+|x|^2)^k$ (global) integrierbar ist, so folgt, dass T_f eine temperierte Distribution ist, und die Integraldarstellung aus (6) auch für $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt.

b) Finden Sie ein Beispiel für $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ sodass T_f keine temperierte Distribution ist.

Hinweis. *Achtung, T_f ist als Funktional auf $\mathcal{C}_C^\infty(\mathbb{R})$ definiert. Um es als Funktional auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ zu verstehen muss man den Integral-Operator erweitern ($\mathcal{C}_C^\infty(\mathbb{R})$ ist eine dichte Teilmenge von $\mathcal{S}(\mathbb{R})$), daher entspricht im Allgemeinen T_f in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ nicht der Integraldarstellung!*

Bemerkung. *Damit sind reguläre Distributionen die nicht zu schnell ansteigende Integrale besitzen tatsächlich temperierte Distributionen (und eignen sich folglich für die Fouriertransformation), insbesondere kann solches $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ mit $T_f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})'$ identifiziert werden.*

Aufgabe 5.3) [Berechnen von Fouriertransformationen]

a) Zeigen Sie

$$[\mathcal{F}f](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{\xi} \sin\left(\frac{(b-a)}{2}\xi\right) e^{-i\frac{(a+b)}{2}\xi} \tag{7}$$

für $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$ die charakteristische Funktion des Intervalls $[a,b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$.

b) Bestimmen Sie die Fouriertransformationen (im passenden Sinne) der folgenden Funktionen: $f_1(t) = e^{iat}$ und $f_2(t) = t^k$ für $a \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 5.4) [Abtasttheorem bandbegrenzte Funktionen]
Man nennt eine Funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$ W-bandbegrenzt (für $W > 0$), falls der Träger deren Fouriertransformation in $[-W, W]$ liegt. Wir wollen im Folgenden das **Shannon-Whittaker** Abtasttheorem beweisen, welches besagt: Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ und W-bandbegrenzt, dann gilt $f = \tilde{f}$ fast überall für ein $\tilde{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ und

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{f}\left(\frac{k\pi}{W}\right) \operatorname{sinc}(Wx - k\pi) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

wobei $\operatorname{sinc}(t) := \sin(t)/t$ eine gerade anaytische Funktion auf $\mathbb{R}$ (eine ganze Funktion) ist.

a) Beweisen Sie das Shannon-Whittaker Theorem anhand der folgenden Schritte:

- Zeigen Sie dass (4) anwendbar ist.
- Es sei
$$\varphi(z) := [\mathcal{F}f]\left(\frac{W}{\pi}z\right), \qquad \psi_x(z) := e^{ix\frac{W}{\pi}z} \qquad \forall z \in [-\pi, \pi[. \tag{9}$$
Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten $c_k(\varphi)$ und $c_k(\psi_x)$.
- Folgern Sie $\tilde{f}(x) = \frac{W}{\sqrt{2\pi^2}}\langle \varphi, \psi_x \rangle_{L^2([-\pi,\pi])}$, und folgern Sie daraus das Shannon-Whittaker Theorem mittels der Fourierreihen von φ, ψ_x.

b) Gegeben sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ mit beschränktem Träger und bandbegrenzt. Zeigen Sie f ist die Nullfunktion.

Bemerkung. *Das Theorem zeigt, dass bandbegrenzte Funktionen komplett durch gleichmäßig abgetasteter Funktionwerte definiert sind, und laut b) gibt es keine nichttrivialen Funktionen sodass f, $\mathcal{F}f$ kompakten Träger haben. Daher gibt es zwangsweise einen Informationsverlust wenn man sich auf beschränkte Gebiete einschränkt (wie es für praktische Berechnungen unvermeidbar ist).*