Richard Huber
richard.huber@uni-graz.at

Grundinformationen: Für eine Funktion $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ messbar auf einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ist das zugehörige Histogramm H_u (bezüglich dem Maß μ) ein Maß gegeben durch

$$H_u(E) = \mu\{x \in \Omega \bigm| u(x) \in E\} = \mu\{u^{-1}(E)\} \qquad \text{für E messbar.} \tag{1}$$

Die zugehörige Verteilungsfunktion G_u is definiert durch

$$G_u(s) = H_u((-\infty, s]) = \mu(\{x \in \Omega \bigm| u(x) \le s\}), \tag{2}$$

und es gilt der Zusammenhang

$$G_u' = H_u \qquad \text{im distributionellen Sinne.} \tag{3}$$

Aufgabe 2.1) [Berechnung eines Histogramms]
Es sei $\Omega = [0,1]^2$. Bestimmen Sie das Histogramm der Funktion

$$u\colon \Omega \to [0,1], \qquad u(x,y) = \begin{cases} x & \text{falls } (x-\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2 \le \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{2}\lfloor y + \frac{1}{2} \rfloor & \text{sonst} \end{cases} \tag{4}$$

bezüglich des Lesbesgue-Maßes auf Ω, wobei $\lfloor \cdot \rfloor$ dem Abrunden (auf nächst kleinere oder gleiche ganze Zahl) entspricht.

Aufgabe 2.2) [Zusammenhang Histogramm und Verteilung]
Gegeben sei das Signal (ein-dimensionales Bild) $u_n\colon \{1,\dots,n\} \to \mathbb{R}$ mit $u_n(k) = \cos(\frac{\pi k}{n})$ für $k = 1,\dots,n$ sowie ein kontinuierliches Signal $u\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $u(x) = \cos(\pi x)$.

a) Bestimmen Sie das Histogramm H_{u_n} und die Verteilung G_{u_n} von u_n (bezüglich des Zählmaßes dividiert durch n) sowie H_u, G_u von u (bezüglich des Lesbesgue Maßes) und überzeugen Sie sich (für diese Funktionen u, u_n) von der Richtigkeit von (3).

b) Zeigen Sie, dass für jedes $\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}H_{u_n}(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}H_u(x), \tag{5}$$

d.h. H_{u_n} konvergiert schwach* gegen H_u.

Hinweis. *Es gilt die (leicht zu überprüfende) Gleichung* $\sin(\arccos(t)) = \sqrt{1-t^2}$ *für* $t \in [0,\pi]$.

Aufgabe 2.3) [Histogramme regulärer Funktionen]
Es sei $\Omega = (0,1)^d$ und $u \in \mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{R})$ mit $\nabla u(x) \ne 0$ für alle $x \in \Omega$. Weiters sei $E \subset \mathbb{R}$ eine abzählbare Menge und H_u das zugehörige Histogramm bezüglich des Lebesgue-Maßes.

a) Zeigen Sie, dass $H_u(E) = 0$ im Fall $d = 1$.

b) Zeigen Sie, dass $H_u(E) = 0$ im Fall $d > 1$.

Hinweis. *Nutzen Sie den Satz über implizite Funktionen, Sie können weiters verwenden, dass das Lesbesgue Maß eines Graphen* $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^d \mid x \in \mathbb{R}^{d-1}\}$ *einer Funktion* $f\colon \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$ *gleich Null ist.*

Bemerkung. *Dieses Beispiel veranschaulicht, dass die Histogramme von Funktionen deren Ableitung nirgends verschwindet keinen diskreten Anteil besitzen, und damit die Funktion jeden Wert fast überall nicht annimmt.*

Programmier-Aufgabe 2.4) [Isodata Segmentierung]
Es sei $U\colon \{1,\dots,N\} \times \{1,\dots,M\} \to \{0,\dots,S\}$ ein diskretes Bild mit diskretem Wertebereich zwischen 0 und $S \in \mathbb{N}$ (klassischerweise S=255). Ein Verfahren um U in ein Schwarz-Weiß Bild $\widetilde{U}$ zu transformieren (zu segmentieren) ist thresholding, wobei für einen Schwellwert (threshold) s_0 gilt $\widetilde{U}(x) = 1$ falls $U(x) > s_0$ und $\widetilde{U}(x) = 0$ falls $U(x) \leq s_0$. Eine klassische Wahl dieses Schwellwerts ist, s_0 so zu wählen, dass

$$s_o \overset{!}{=} F(s_0) := \frac{1}{2}\left(\frac{\int_{[0,s_0[} s \,\mathrm{d}H_U}{\int_{[0,s_0[} 1 \,\mathrm{d}H_U} + \frac{\int_{[s_0,S]} s \,\mathrm{d}H_U}{\int_{[s_0,S]} 1 \,\mathrm{d}H_U}\right), \tag{6}$$

wobei im Fall $s_0 = S$ der rechte Bruch als S verstanden wird, auch im Fall $0/0$.

Schreiben Sie ein Programm, welches eine automatische Schwellwertwahl anhand der Fixpunktiteration $s_0^{n+1} = F(s_0^n)$ berechnet, und anschließende Segmentierung anhand Schwellwertbildung durchführt. Rescalieren Sie dafür falls notwendig die Werte des Bildes auf $0, 1, \dots, 255$. Testen Sie dieses Programm anhand des Bildes barcode.png[1].

[1]Photo by Nick Richards, licenced under CC BY-SA 2.0.